Anlage 2

Satzungsteil Wahlordnung Kollegialorgane

Spezifikation D'Hondtsches Verfahren

1 Überblick

Das D'Hondtsche Verfahren wird verwendet, um Wählerstimmen in Mandate für verschiedene Parteien umzurechnen. Im Kontext dieses Satzungsteils werden wir von „Wahlvorschlägen" anstelle von „Parteien" sprechen. Das D'Hondtsche Verfahren ist eine bewährte Vorgangsweise zur Mandatsermittlung, die beispielsweise auch bei den österreichischen Nationalratswahlen verwendet wird. In der Literatur sind verschiedene Varianten des Verfahrens bekannt, die alle (möglicherweise) auf das gleiche Resultat führen. In Spezialfällen kann es vorkommen, dass das Verfahren für eine gewisse Anzahl an Mandaten *nicht eindeutig festlegt*, auf welche Wahlvorschläge sie vergeben werden müssen. Klassisch wird in diesen Fällen ein *Losentscheid* durchgeführt.

Ziel dieses Dokuments ist es, einen *Algorithmus* auf Basis einer *Variante des D'Hondtschen Verfahrens* zu beschreiben, der in *der Mehrzahl der Fälle* die Mandatszahlen *eindeutig festlegt* und *ohne Zufallsentscheidungen* auskommt. Insbesondere soll dieses Dokument Folgendes leisten:

- Es soll eine *Vorlage zur Implementierung eines Algorithmus* im Rahmen der digitalen Wahl darstellen. Daher müssen alle Sonderfälle berücksichtigt und im Detail beschrieben sein, um einem:r Programmierer:in als exakte Vorlage zu dienen.
- Es soll eine Grundlage zur *Überprüfung der Korrektheit* einer konkreten Implementierung des Algorithmus im Rahmen der digitalen Wahl darstellen.
- Es soll eine *exakte Anleitung zur Mandatsermittlung* auch im Falle einer *analogen Wahl* sein.
- Es soll das *allgemeine Verständnis des Verfahrens* durch die Beispiele in Abschnitt 4 gefördert werden.

2 Die Ausgangslage

Gegeben sind

v	...	die *Anzahl* der *Wahlvorschläge.*
$(L_1, \ldots, L_i, \ldots, L_v)$	...	die *Namen* der Wahlvorschläge.
$(s_1, \ldots, s_i, \ldots, s_v)$	...	die *gültig abgegebenen Stimmen*, d.h. jeweils s_i Stimmen für Wahlvorschlag L_i.
m	...	die *Anzahl* der zu vergebenden *Mandate.*

Gesucht sind *Mandatszahlen* $(Z_1, \ldots, Z_i, \ldots, Z_v)$ mit

$$\sum_{i=1}^{v} Z_i = m,$$

d.h. jeweils Z_i Mandate für Wahlvorschlag L_i, sodass alle m Mandate vergeben werden. Das Verhältnis der Mandatszahlen soll das gegebene Stimmenverhältnis „möglichst gut abbilden".

Beispiel: Es gibt $v = 4$ Wahlvorschläge mit den Namen A, B, C und D. Auf A entfallen 304 Stimmen, auf B 228, auf C 80 und auf D 76 Stimmen. Sind $m = 6$ Mandate zu vergeben, so wird $Z = (3, 2, 1, 0)$, d.h. $Z_1 = 3$ Stimmen für A, $Z_2 = 2$ Stimmen für B, $Z_3 = 1$ Stimme für C und $Z_4 = 0$ Stimmen für D. Eine andere Möglichkeit wäre z.B. $Z = (3, 1, 1, 1)$, aber $Z = (3, 2, 1, 0)$ ist „besser".

3 Der Algorithmus

In der formalen Beschreibung ist es von Vorteil, die Wahlvorschläge „durchzunummerieren" und sie mit $1, \ldots, v$ zu bezeichnen anstelle der Namen $(L_1, \ldots, L_v)$. Wir verwenden die folgenden Bezeichnungen:

$V = \{1, \ldots, v\}$	...	die *Menge* der *Wahlvorschläge.*
$M = \{1, \ldots, m\}$	...	die *Menge* der *möglichen Mandatszahlen.*
$S = \sum_{i=1}^{v} s_i$	...	die *Summe* der gültig abgegebenen Stimmen.

Der Ablauf ist wie folgt:

Schritt 1: Bilde zu den Wahlvorschlägen die Liste der *Vergleichszahlen* bestehend aus den (Bruch-)Zahlen

$$\frac{s_i}{j} \qquad \text{für } i \in V \text{ und } j \in M$$

und sortiere diese Liste (bzgl. $\geq$) zu einer neuen Liste $h = (h_1, h_2, \ldots, h_{v \cdot m})$, sodass

$$h_1 \geq h_2 \geq \cdots \geq h_{v \cdot m}.$$

Schritt 2: Die *Wahlzahl* w ergibt sich dann als $w = h_m$.

Schritt 3: Die Anzahl Z_i der auf den Wahlvorschlag L_i entfallenden Mandate ergibt sich wie folgt:

Schritt 3.1: Ist $h_{m+1} \neq w$, so ist $Z_i = \lfloor \frac{s_i}{w} \rfloor$ (für $i \in V$)[1].

Schritt 3.2: Ist $h_{m+1} = w$, so bestimmt man[2] maximale positive ganze Zahlen k und l mit $h_{m+1-k} = h_{m+l}$. Es müssen die letzten k Mandate unter $k + l$ Wahlvorschlägen aufgeteilt werden[3].

Schritt 3.2.1: Man bestimmt die Menge der *Wahlvorschläge, deren Vergleichzahlen die Wahlzahl* beinhalten

$$W = \Big\{ i \in V \mid \frac{s_i}{j} = w \quad \text{für ein } j \in M \Big\}.$$

Schritt 3.2.2: Es sind *alle Korrekturvektoren* δ bestehend aus 0 und 1 zu bestimmen, die genau k Einsen an Positionen haben, die zu W gehören. An allen Positionen, die nicht zu W gehören, sollen ebenfalls Einsen stehen, d.h.[4]

$$D = \Big\{ (\delta_1, \ldots, \delta_v) \mid \delta_i \in \{0,1\} \text{ und } \sum_{i \in W} \delta_i = k \text{ und } \delta_i = 1 \text{ für } i \in V \setminus W \Big\}.$$

Schritt 3.2.3: Die (von δ abhängige) *Anzahl an Mandaten* für Wahlvorschlag L_i ist

$$Y_i(\delta) := \lfloor \frac{s_i}{w} \rfloor - 1 + \delta_i \qquad (\text{für } i \in V).$$

Schritt 3.2.4: Es sind all jene Korrekturvektoren $\delta \in D$ zu bestimmen, die zu *„optimaler Mandatsverteilung“* führen. Eine Mandatsverteilung ist *optimal*, wenn die Summe der quadratischen Abweichungen der Mandatsanteile von den Stimmenanteilen minimal ist, d.h.

$$O = \Big\{ \delta \in D \mid \sigma(\delta) \leq \sigma(\gamma) \text{ für alle } \gamma \in D \Big\},$$

[1] *In der Mehrzahl der Fälle in der Praxis* wird das klassische D'Hondtsche Verfahren *ohne Losentscheid* auskommen, was in unserem Algorithmus dem entspricht, dass er mit Schritt 3.1 endet. Siehe dazu Beispiel 1 in Abschnitt 4.

[2] Die Schritte 3.2.x ersetzen den im klassischen D'Hondtschen Verfahren vorgesehenen Losentscheid, indem statt einer zufälligen Mandatsvergabe nach der „besten Variante“ einer Mandatsvergabe gesucht wird.

[3] Würde man nun an alle Wahlvorschläge, die die Wahlzahl w enthalten, $\lfloor \frac{s_i}{w} \rfloor$ viele Mandate vergeben wie in Schritt 3.1, dann würden um l Mandate zu viel vergeben. Würde man an alle diese nur $\lfloor \frac{s_i}{w} \rfloor - 1$ vergeben, wären es um k zu wenig.

[4] Nicht alle $i \in W$ können $\lfloor \frac{s_i}{w} \rfloor$ viele Mandate erhalten, nur k von ihnen erreichen diese Mandatszahl, die anderen bekommen um 1 Mandat weniger. Alle $i \in V \setminus W$ erhalten $\lfloor \frac{s_i}{w} \rfloor$ viele Mandate. Ein Korrekturvektor δ sorgt genau dafür, dass diejenigen Wahlvorschläge i, für die $\delta_i = 1$ ist, die Mandatszahl $\lfloor \frac{s_i}{w} \rfloor$, die mit $\delta_i = 0$ eine Mandatszahl $\lfloor \frac{s_i}{w} \rfloor - 1$ erreichen. So bekommen genau k Wahlvorschläge aus W je ein Mandat mehr als die anderen. Die Tatsache, dass $\delta_i = 1$ für $i \in V \setminus W$ gesetzt wird, ist ein technisches Detail, das Schritt 3.2.3 vereinfacht, weil dort auf diese Weise auf eine Fallunterscheidung verzichtet werden kann.

wobei

$$\sigma(\delta) := \sum_{i=1}^{v} \left(\frac{Y_i(\delta)}{m} - \frac{s_i}{S} \right)^2$$

Schritt 3.2.5: Die Menge O enthält alle Korrekturvektoren δ, die zu „*gleich guten*“ Resultaten $\sigma(\delta)$ führen. Aus diesen wählt man einen zufälligen aus[5] und ermittelt die entsprechenden Mandatszahlen, d.h.

$$Z_i = Y_i(\delta) \qquad \text{für ein beliebiges } \delta \in O.$$

4 Beispiele

Beispiel 1

Für das Beispiel aus Abschnitt 2 ergeben sich die Vergleichszahlen wie in Tabelle 1 und daraus die sortierte Liste h als

$$h = (304.00, 228.00, 152.00, 114.00, 101.33, 80.00, 76.00, 76.00, 76.00, 60.80, \ldots, 12.67).$$

Die Wahlzahl ist

$$w = h_6 = 80.00,$$

und da $h_7 = 76.00 \neq w$ ist, landen wir im Schritt 3.1 bei

$$Z_1 = \lfloor \tfrac{304}{80} \rfloor = \lfloor 3.8 \rfloor = 3 \qquad Z_2 = \lfloor \tfrac{228}{80} \rfloor = \lfloor 2.85 \rfloor = 2$$
$$Z_3 = \lfloor \tfrac{80}{80} \rfloor = \lfloor 1 \rfloor = 1 \qquad Z_4 = \lfloor \tfrac{76}{80} \rfloor = \lfloor 0 \rfloor = 0$$

und somit $Z = (3, 2, 1, 0)$.

	A	B	C	D
1	304.00	228.00	80.00	76.00
2	152.00	114.00	40.00	38.00
3	101.33	76.00	26.67	25.33
4	76.00	57.00	20.00	19.00
5	60.80	45.60	16.00	15.20
6	50.67	38.00	13.33	12.67

Tabelle 1: Vergleichszahlen im D’Hondtschen Verfahren.

[5] Die Menge O wird in der Mehrzahl der Fälle aus nur einem Element bestehen, sodass δ in diesen Fällen eindeutig bestimmt ist. Nur wenn O mehr als ein Element enthält, kommt der Zufall ins Spiel. Siehe dazu die Beispiele 2–5 in Abschnitt 4.

Beispiel 2

Wie Beispiel 1, aber nun mit $m = 7$ zu vergebenden Mandaten. Die Wahlzahl ist

$$w = h_7 = 76.00,$$

und da $h_8 = 76.00 = w$ ist, landen wir im Schritt 3.2. Würde man nun (wie im Regelfall) an alle Wahlvorschläge $Z_i = \lfloor \frac{s_i}{w} \rfloor$ viele Mandate vergeben, so wären das

$$Z_1 = 4 \qquad Z_2 = 3 \qquad Z_3 = 1 \qquad Z_4 = 1,$$

und damit insgesamt 9 Mandate. Wir vergeben vorerst an alle um je 1 Mandat weniger und starten mit einer *vorläufigen Mandatsverteilung* $(3, 2, 0, 0)$, in der nur 5 Mandate (2 zu wenig) fix vergeben sind. Aufgabe der Korrekturvektoren ist es nun, diese vorläufige Mandatsverteilung in eine korrekte endgültige Verteilung überzuführen, wobei C fix 1 Mandat zugeteilt bekommt, weil C nicht in den Wahlvorschlägen mit gleicher Wahlzahl enthalten ist. Im klassischen Fall kommt nun der Zufall ins Spiel, indem 1 Mandat per Losentscheid vergeben wird.

Wir hingegen berechnen $k = 1$ und $l = 2$, d.h. $h_7 = h_9$, diese k und l sind maximal, da $h_6 \neq 76.00$ und auch $h_{10} \neq 76.00$. Es ist $k = 1$ Mandat unter $k + l = 3$ Wahlvorschlägen aufzuteilen, und zwar unter denen mit den Indices $W = \{1, 2, 4\}$, also unter A, B und D (in den Wahlzahlen von C ist 76.00 ja *nicht* enthalten). Das Stimmenverhältnis lautet ca.

$$0.442 : 0.331 : 0.116 : 0.110$$

Die Korrekturvektoren δ mit den zugehörigen Mandatsverteilungen $Y(\delta)$, dem Mandatsverhältnis $\frac{Y_i(\delta)}{m}$ und deren Abweichung $\sigma(\delta)$ vom Stimmenverhältnis sind in Tabelle 2 zusammengefasst[6].

δ	$Y(\delta)$	$\frac{Y_i(\delta)}{m}$	$\sigma(\delta)$
$(1, 0, 1, 0)$	$(4, 2, 1, 0)$	0.571 : 0.286 : 0.143 : 0.000	0.031784
$(0, 1, 1, 0)$	$(3, 3, 1, 0)$	0.429 : 0.429 : 0.143 : 0.000	0.022529
$(0, 0, 1, 1)$	$(3, 2, 1, 1)$	0.429 : 0.286 : 0.143 : 0.143	0.004019

Tabelle 2: Korrekturvektoren im D'Hondtschen Verfahren Beispiel 2.

Daher ist $O = \{(0, 0, 1, 1)\}$ und $Z = (3, 2, 1, 1)$.

[6] $\delta_3 = 1$ ist fix, weil $3 \notin W$. Das bewirkt, dass C fix ein Mandat bekommen wird. An den restlichen Positionen enthalten alle δ genau einmal eine Eins je nach dem, welchem Wahlvorschlag das eine Mandat zugeschlagen wird.

Beispiel 3

Wie Beispiel 1, nun mit $m = 8$ zu vergebenden Mandaten. Die Wahlzahl ist

$$w = h_8 = 76.00,$$

und da $h_9 = 76.00 = w$ ist, landen wir im Schritt 3.2 mit $k = 2$ und $l = 1$, d.h. $h_7 = h_9$, diese k und l sind maximal, da $h_6 \neq 76.00$ und auch $h_{10} \neq 76.00$. Es sind $k = 2$ Mandate unter $k + l = 3$ Wahlvorschlägen aufzuteilen, und zwar unter denen mit den Indices $W = \{1, 2, 4\}$, also unter A, B und D (in den Wahlzahlen von C ist 76.00 ja *nicht* enthalten). Das Stimmenverhältnis lautet ca.

$$0.442 : 0.331 : 0.116 : 0.110$$

Die Korrekturvektoren δ mit den zugehörigen Mandatsverteilungen $Y(\delta)$, dem Mandatsverhältnis $\frac{Y_i(\delta)}{m}$ und deren Abweichung $\sigma(\delta)$ vom Stimmenverhältnis sind in Tabelle 3 zusammengefasst.

δ	$Y(\delta)$	$\frac{Y_i(\delta)}{m}$	$\sigma(\delta)$
$(1, 1, 1, 0)$	$(4, 3, 1, 0)$	0.500 : 0.375 : 0.125 : 0.000	0.017560
$(1, 0, 1, 1)$	$(4, 2, 1, 1)$	0.500 : 0.250 : 0.125 : 0.125	0.010293
$(0, 1, 1, 1)$	$(3, 3, 1, 1)$	0.375 : 0.375 : 0.125 : 0.125	0.006659

Tabelle 3: Korrekturvektoren im D'Hondtschen Verfahren Beispiel 3.

Daher ist $O = \{(0, 1, 1, 1)\}$ und $Z = (3, 3, 1, 1)$.

Beispiel 4

Wie Beispiel 1, nun mit $m = 9$ zu vergebenden Mandaten. Die Wahlzahl ist

$$w = h_9 = 76.00,$$

und da $h_{10} \neq 60.80 = w$ ist, landen wir im Schritt 3.1 bei

$$Z_1 = \lfloor \tfrac{304}{76} \rfloor = \lfloor 4 \rfloor = 4 \qquad Z_2 = \lfloor \tfrac{228}{76} \rfloor = \lfloor 3 \rfloor = 3$$
$$Z_3 = \lfloor \tfrac{80}{76} \rfloor = \lfloor 1.05 \rfloor = 1 \qquad Z_4 = \lfloor \tfrac{76}{76} \rfloor = \lfloor 1 \rfloor = 1$$

und somit $Z = (4, 3, 1, 1)$.

Beispiel 5

Es gibt $v = 2$ Wahlvorschläge mit den Namen A und B. Auf A und B entfallen jeweils 50 Stimmen, es sind $m = 3$ Mandate zu vergeben. Hier wird der Zufall entscheiden müssen. Die sortierten Vergleichszahlen lauten

$$h = (50.00, 50.00, 25.00, 25.00, 16.67, 16.67).$$

Die Wahlzahl ist

$$w = h_3 = 25.00,$$

und da $h_4 = 25.00 = w$ ist, landen wir im Schritt 3.2 mit $k = 1$ und $l = 1$, d.h. $h_3 = h_4$, diese k und l sind maximal, da $h_2 \neq 25.00$ und auch $h_5 \neq 25.00$. Es ist $k = 1$ Mandat unter $k+l = 2$ Wahlvorschlägen aufzuteilen, und zwar unter denen mit den Indices $W = \{1, 2\}$, also unter A und B. Das Stimmenverhältnis lautet

$$0.5 : 0.5$$

Die Korrekturvektoren δ mit den zugehörigen Mandatsverteilungen $Y(\delta)$, dem Mandatsverhältnis $\frac{Y_i(\delta)}{m}$ und deren Abweichung $\sigma(\delta)$ vom Stimmenverhältnis sind in Tabelle 4 zusammengefasst.

δ	$Y(\delta)$	$\frac{Y_i(\delta)}{m}$	$\sigma(\delta)$
$(1,0)$	$(2,1)$	$0.667 : 0.333$	0.055556
$(0,1)$	$(1,2)$	$0.333 : 0.667$	0.055556

Tabelle 4: Korrekturvektoren im D'Hondtschen Verfahren Beispiel 5.

Daher ist $O = \{(1,0), (0,1)\}$, eine zufällige Auswahl $\delta \in O$ liefert $Z = (1, 2)$.

5 Anforderungen an eine Implementierung

Eine konkrete Realisierung des oben beschriebenen Algorithmus muss folgende Zwischenausgaben dokumentieren:

1. die Vergleichszahlen $\frac{s_i}{j}$ in Matrixform mit v Spalten und m Zeilen,
2. die sortierte Liste h,
3. die Wahlzahl w,
4. die Tatsache, ob $h_{m+1} = w$ oder nicht.
    - Im Fall $h_{m+1} \neq w$ die Liste Z.
    - Im Fall $h_{m+1} = w$
        - die Zahlen k und l,
        - die Menge W,
        - das Stimmenverhältnis $\frac{s_i}{S}$,
        - alle Korrekturvektoren δ mit den zugehörigen Mandatsverteilungen $Y(\delta)$, dem Mandatsverhältnis $\frac{Y_i(\delta)}{m}$ und deren Abweichung $\sigma(\delta)$ vom Stimmenverhältnis,
        - die Menge der optimalen Korrekturvektoren O und die dazugehörigen Mandatsverteilungen $Y(\delta)$ und
        - schlussendlich die Liste Z.