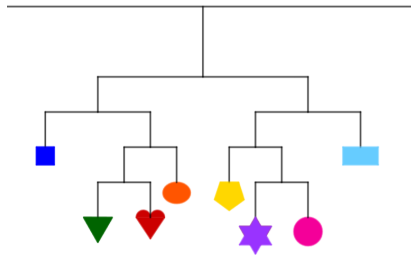


Lösungen des Monats - Dezember 2024

Maximathik - die offene Kategorie

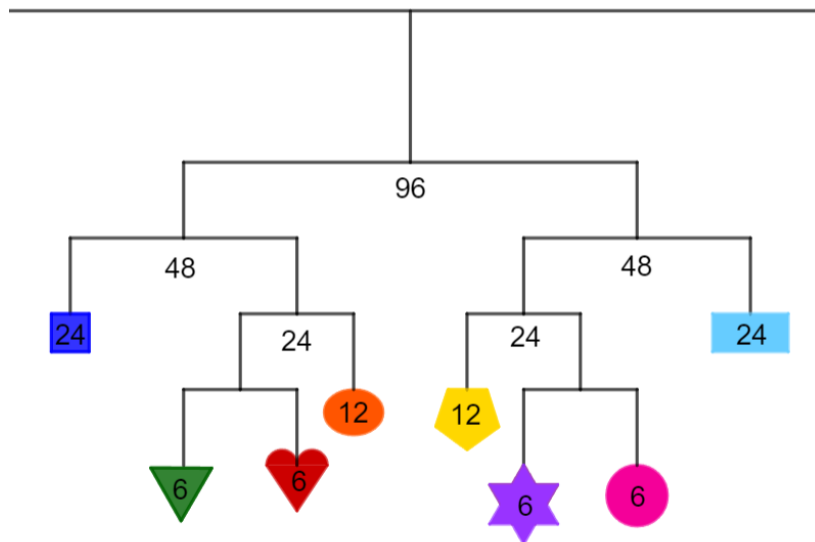
Aufgabe 1: Mobile Kekserl

Agnes, Bernadette, Christian und Dominik haben gemeinsam zu Hause bei Christian Kekserl gebacken. Diese unterscheiden sich in der Farbe, Form und Masse. Sie hängen einige diese Kekserl auf ein Art Mobile. Die aufgehängten Kekserl wiegen zusammen 96 g. Wie viel wiegen das Herz und das Fünfeck insgesamt (in g), wenn das Mobile perfekt ausbalanciert ist?



Ergebnis: 18

Lösung: Immer, wenn sich das Mobile von oben weg teilt, ist auf einer Seite jeweils die Hälfte der Masse von darüber. Dies gilt aber nur, weil die Stäbe auf jeweils beiden Seiten gleich lang sind. Folgende Abbildung veranschaulicht die Masse an jedem Punkt des Mobiles. Wir können herauslesen, dass das Herz 6 g und das Fünfeck 12 g wiegt. Damit ist die Lösung $6 + 12 = 18$ g.

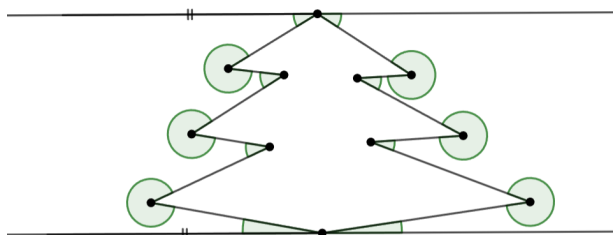


Rufe mit Hilfe des QR-Codes unsere Website auf. Dort findest du eine Anleitung, wie du deine Lösungen abgeben kannst. Jeden Monat gibt es neue Aufgaben, bei denen du Punkte sammeln kannst



Aufgabe 2: Weihnachtliche Winkel summen

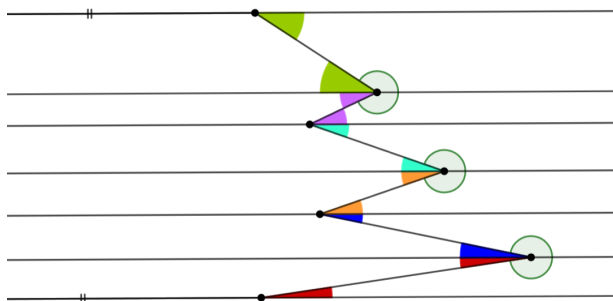
Im Verlauf des Treffens teilen sich die Freunde in zwei Gruppen auf, die sich jeweils gegenseitig ein Rätsel stellen. Agnes und Bernadette fertigen in GeoGebra eine Zeichnung des eigenen Christbaums an. Sie zeichnen spaßeshalber auch einige Winkel ein und stellen danach Christian und Dominik folgende weihnachtliche Aufgabe: Wie groß ist die Summe der grünen Winkel (in Grad)?



Ergebnis: 2160

Lösung: In der Abbildung sind für eine bessere Darstellung die Winkel etwas verändert und es ist nur die rechte Hälfte des Christbaums dargestellt - das ändert aber am Lösungsansatz nichts.

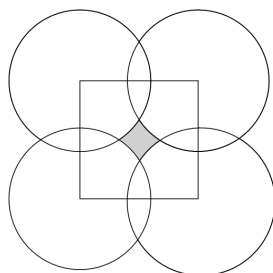
Zeichnet man zusätzliche parallele Linien ein, erkennt man, dass die spitzen Winkel kongruent zu denen sind, die jeweils für einen vollen Kreis fehlen.



Es ergeben sich sechs vollständige Kreise für den den ganzen Christbaum, somit ein Winkel von $6 \cdot 360 = 2160$.

Aufgabe 3: Keks-Kleeblatt

Christian und Dominik rollen die letzten Teigreste erneut aus und drücken dann mit einem Keksausstecher ein Quadrat in den Teig. Dieses hat den Flächeninhalt 3. Danach verwenden sie viermal einen kreisförmigen Keksausstecher mit Radius 1, wobei der Mittelpunkt jeweils im Eckpunkt des Quadrats liegt (siehe Abbildung). Wie groß ist die graue eingezeichnete Fläche?



Ergebnis: 0,22

Rufe mit Hilfe des QR-Codes unsere Website auf. Dort findest du eine Anleitung, wie du deine Lösungen abgeben kannst. Jeden Monat gibt es neue Aufgaben, bei denen du Punkte sammeln kannst



Lösung: Lösung 1:

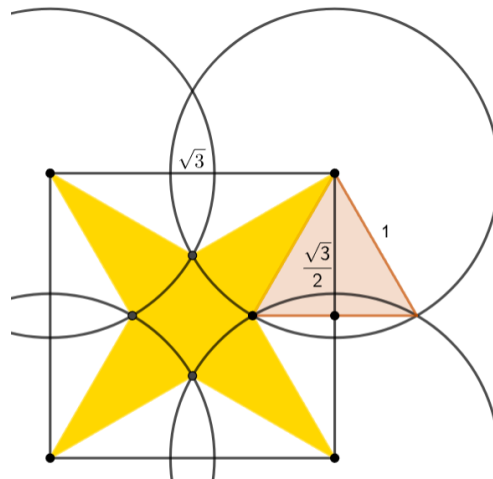
Der Flächeninhalt des Quadrates ist 3, somit hat das Quadrat eine Seitenlänge von $\sqrt{3}$.

Wir betrachten das in folgende Abbildung eingezeichnete Dreieck. Zwei Seiten des Dreiecks sind durch den Radius des Kreises gegeben, also gleich 1. Die Höhe des Dreiecks ist $\frac{\sqrt{3}}{2}$ lang, da die Seitenlänge der Quadrates $\sqrt{3}$ lang ist. Damit lässt sich die Hälfte der dritten Seite mit dem Satz von Pythagoras berechnen:

$$\sqrt{1^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}$$

Somit ist die dritte Seitenlänge gleich 1 und es handelt sich um ein gleichseitiges Dreieck. Der Flächeninhalt des Dreiecks ist

$$1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$



Innerhalb des Quadrats befinden sich 8 Hälften dieser Dreiecke. Ziehen wir diese vom Quadrat ab, so erhalten wir einen vierzackigen Stern mit Fläche:

$$3 - 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = 3 - \sqrt{3}$$

Da gleichseitige Dreiecke immer einen Innenwinkel von 60° besitzen, können wir auch die Innenwinkel der Sternspitzen berechnen:

$$\alpha_{\text{Stern}} = 90^\circ - 2 \cdot \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ$$

Wir ziehen somit vier Kreissektoren mit jeweils 30° von der Fläche des Sterns ab, um die gesuchte Fläche zu erhalten:

$$3 - \sqrt{3} - 4 \cdot \frac{1^2 \cdot 30 \cdot \pi}{360} = 3 - \sqrt{3} - \frac{\pi}{3} \approx 0.22$$

Rufe mit Hilfe des QR-Codes unsere Website auf. Dort findest du eine Anleitung, wie du deine Lösungen abgeben kannst. Jeden Monat gibt es neue Aufgaben, bei denen du Punkte sammeln kannst

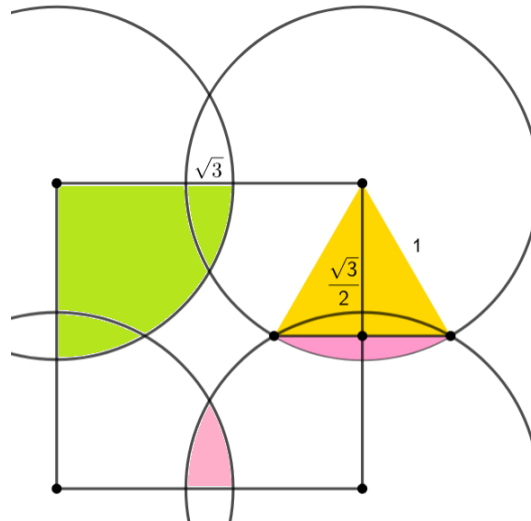


Lösung 2:

Der Flächeninhalt des Quadrates ist 3, somit hat das Quadrat eine Seitenlänge von $\sqrt{3}$.
Wir betrachten das in folgende Abbildung eingezeichnete Dreieck. Zwei Seiten des Dreiecks sind durch den Radius des Kreises gegeben, also gleich 1. Die Höhe des Dreiecks ist $\frac{\sqrt{3}}{2}$ lang, da die Seitenlänge der Quadrates $\sqrt{3}$ lang ist. Damit lässt sich die Hälfte der dritten Seite mit dem Satz von Pythagoras berechnen:

$$\sqrt{1^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}$$

Somit ist die dritte Seitenlänge gleich 1 und es handelt sich um ein gleichseitiges Dreieck.



Das Dreieck mit dem darunter liegenden Kreissegment bildet einen Kreissektor mit Winkel 60° . Daher ist die Fläche des Kreissektors:

$$\frac{1^2 \cdot \pi \cdot 60}{360} = \frac{\pi}{6}$$

Die Fläche des Kreissegments lässt sich als die Differenz des Kreissektors und des Dreiecks berechnen. Der Flächeninhalt des Dreiecks ist

$$1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

Somit ist die Fläche des Kreissegments gleich

$$\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{2\pi - 3 \cdot \sqrt{3}}{12}$$

Die Fläche des Kreissegments ist auch gleich der Fläche der Schnittfläche von 2 Kreisen und des Quadrates. Wir erhalten nun die grau eingezeichnete Fläche mithilfe der Fläche des Quadrates minus vier Viertelkreise (= ganzer Kreis) plus vier mal der Schnittfläche von 2 Kreisen und des Quadrates:

$$3 - 1^2 \cdot \pi + 4 \cdot \frac{2\pi - 3 \cdot \sqrt{3}}{12} = 3 - \sqrt{3} - \frac{\pi}{3} \approx 0.22$$

Alle 4 Schnittflächen werden durch die Viertelkreise doppelt abgezogen, daher werden sie wieder je einmal ergänzt.

Rufe mit Hilfe des QR-Codes unsere Website auf. Dort findest du eine Anleitung, wie du deine Lösungen abgeben kannst. Jeden Monat gibt es neue Aufgaben, bei denen du Punkte sammeln kannst

